Théorème de Brouwer en dimension 1 et 2

Leçons concernées : 181 190 203 204 253

Théorème 1. *Toute application continue de la boule unité fermée de $\mathbb{R}^n$ dans elle-même admet (au moins) un point fixe.*

Démonstration.

On note B la boule unité fermée et S la sphère unité de $\mathbb{R}^n$ (pour la norme euclidienne).

Étape 1 : Montrons le résultat en dimension 1.

On va montrer le résultat pour tout intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$. Soit $F : [a, b] \to [a, b]$ une fonction continue. On considère la fonction $\varphi : x \longmapsto F(x) - x$. φ est alors continue et vérifie $\varphi(a) = F(a) - a \geqslant 0$ et $\varphi(b) = F(b) - b \leqslant 0$. Ainsi, par le théorème des valeurs intermédiaires, φ s'annule au moins une fois sur $[a, b]$, donc F admet au moins un point fixe.

Étape 2 : Si l'énoncé était faux, montrons qu'il existerait une rétraction de la boule sur la sphère.

Soit $F : B \to B$ une application sans point fixe. On note G l'application qui à $x \in B$ associe l'intersection de S avec la demi-droite issue de $F(x)$ passant par x. Pour tout $x \in B$, $G(x)$ vérifie alors :

$$\|G(x)\|^2 = 1 \quad \text{et} \quad G(x) - F(x) = \lambda(x - F(x)) \quad \text{avec} \quad \lambda > 0$$

On obtient alors :

$$P_x(\lambda) = \|G(x)\| - 1 = \lambda^2 \|x - F(x)\|^2 + 2\lambda \langle x - F(x), F(x) \rangle + \|F(x)\|^2 - 1 = 0$$

$P_x(\lambda)$ est alors un polynôme de degré 2 en λ. On a de plus $P_x(0) = \|F(x)\| - 1 \leqslant 0$ et :

$$\begin{aligned} P_x(1) &= \|x - F(x)\|^2 + 2\langle x - F(x), F(x) \rangle + \|F(x)\|^2 - 1 \\ &= \|x\|^2 - 2\langle x, F(x) \rangle + \|F(x)\|^2 + 2\langle x, F(x) \rangle - 2\|F(x)\|^2 + \|F(x)\|^2 - 1 \\ &= \|x\|^2 - 1 \\ &\leqslant 0 \end{aligned}$$

Enfin, comme $\|x - F(x)\|^2 > 0$, on a $\lim_{|\lambda| \to \infty} P_x(\lambda) = +\infty$. Ainsi, P_x admet deux racines réelles distinctes, une sur $]-\infty, 0]$ et une sur $[1, +\infty[$. On a alors un discriminant strictement positif pour tout $x \in B$:

$$\Delta(x) = 4\langle x - F(x), F(x) \rangle^2 - 4\|x - F(x)\|^2 (\|F(x)\|^2 - 1)$$

La racine positive $\lambda(x)$ de P_x est donc :

$$\lambda(x) = \frac{-\langle x - F(x), F(x) \rangle + \sqrt{\langle x - F(x), F(x) \rangle^2 - \|x - F(x)\|^2 (\|F(x)\|^2 - 1)}}{\|x - F(x)\|^2}$$

On en déduit alors que $x \longmapsto \lambda(x)$ est continue, donc que G est continue sur B. De plus, $P_x(1) = 0$ si $x \in S$, d'où $\lambda(x) = 1$ dans ce cas et $G(x) = x$ sur S.
Ainsi, G est continue sur B et sa restriction à S est l'identité, c'est donc une rétraction.

Étape 3 : Montrons le résultat en dimension 2.

On considère l'application :

$$\gamma : \left| \begin{array}{ccc} [0,1]\times[0,1] & \longrightarrow & S \\ (s,t) & \longmapsto & \gamma_s(t) = G(s\cos(2\pi t), s\sin(2\pi t)) \end{array} \right.$$

Cette application est continue sur $[0,1]\times[0,1]$ à valeurs dans la sphère unité, et déforme continument γ_0 et γ_1 sans rencontrer l'origine. Leurs indices par rapport à l'origine sont alors égaux. Or, en identifiant $\mathbb{R}^2$ à $\mathbb{C}$, on a :

$$\mathrm{Ind}_{\gamma_0}((0,0)) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_0}\frac{dz}{z} = 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{Ind}_{\gamma_1}((0,0)) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_1}\frac{dz}{z} = 1$$

$\square$

Références

[Rou15] François Rouvière. *Petit Guide de Calcul Différentiel.* Cassini, 2015